

УПРАВЛЕНИЕ ПОТОКОМ ПОДЗЕМНЫХ ВОД ЧЕРЕЗ ГАЛЕРЕИ

Р.С.Кузьмин, Э.В.Скворцов

Казанский государственный университет

420008, Казань, ул. Кремлёвская, 18

Eduard.Scvortsov@ksu.ru

Одним из подходов к решению проблемы защиты подземных вод от загрязнений является создание в потоке загрязнённых вод искусственных гидродинамических барьеров, препятствующих продвижению загрязнений [1]. Воздействие на загрязнённый поток реализуется при этом с помощью батарей скважин. Возможности управления потоком через скважины проанализированы при различных вариантах их размещения [1–5]. В работе [5] дана постановка модельной задачи о создании гидродинамического барьера для потока загрязнений с помощью дренажной галереи. Получено её аналитическое решение для одной из возможных схем течения. Ниже приводятся полный анализ такого течения и решение аналогичной задачи в случае двух галерей. Считается, что галереи расположены в однородном и изотропном пласте единичной мощности, где имеется поток загрязнённых подземных вод, жидкость несжимаема, справедлив закон Дарси, течение потенциально и двумерно. Дренажные галереи имитируются линиями постоянного давления.

Галерея в потоке. Пусть в естественном потоке загрязнённых вод со скоростью v , направленной по оси абсцисс x , имеется прямолинейная галерея длиной L , расположенная на оси ординат y , с расходом $-q$ ($q>0$). Давление на ней постоянно, а её центр совпадает с началом координат.

Найдём положение границы Γ , разделяющей область течения от галереи и набегающий поток. Комплексный потенциал течения имеет вид

$$W(z) = -\frac{q}{2\pi} \ln \left[z + \sqrt{z^2 + L^2/4} \right] - v z. \quad (1)$$

Далее координата $z = x + iy$ нормируется на $L/2$ и вводится безразмерный параметр расхода $Q = q(\pi v L)$. Течение, создаваемое набегающим потоком и галереей, может осуществляться по двум схемам.

Первая схема реализуется при достаточно больших значениях расхода Q , когда искомая граница не достигает галереи. В [5] получено уравнение этой границы в явном виде

$$x = -\cos(y/Q) \sqrt{y^2 \cos^2(y/Q) - 1}, \quad (2)$$

где $Q \geq 1$. Значение $Q = 1$ является критическим для данной схемы. Граница Γ при этом имеет с галереей общую точку N , расположенную в начале координат, в которой скорость течения обращается в нуль. Касательная к границе Γ в точке N составляет с осью y угол, равный $\pi/6$.

Вторая схема реализуется при значениях $Q < 1$, когда набегающий загрязнённый поток преодолевает барьер, создаваемый галереей, и прорывается через её центральную часть.

Безразмерная скорость течения на этой части галереи претерпевает скачок, так что на ней проекция скорости $v=v(x,y)$ на ось x в соответствии с представлением (1) имеет вид

$$v_x(-0,y)=1-\frac{Q}{\sqrt{1-y^2}}, \quad v_x(+0,y)=1+\frac{Q}{\sqrt{1-y^2}}. \quad (3)$$

Течение жидкости оказывается при этом разбитым на загрязнённый поток, с двух сторон обтекающий галерею, прорвавшийся через галерею поток и на два симметричных относительно оси x потока от тех участков галереи, которые ещё создают барьер для загрязнений.

Пусть $y > 0$. Приравняв к нулю комплексно-сопряжённую скорость течения, можно найти полуширину прорвавшегося через галерею потока при $x = 0$

$$y_0 = \sqrt{1-Q^2}. \quad (4)$$

Граница Γ области для потока от галереи имеет два участка. Первый участок Γ_1 начинается в точке с координатами $(+0,y_0)$, и его абсцисса неотрицательна. Второй участок Γ_2 начинается в точке N нулевой скорости течения с координатами $(-0,y_0)$, причём при возрастании ординаты кривой её абсцисса меняет знак с минуса на плюс.

Формулы (2), (3) позволяют найти значения функции тока Ψ на границах Γ_1 и Γ_2 :

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= y_0 + Q \arcsin y_0, \\ \Psi_2 &= y_0 - Q \arcsin y_0 + \pi Q. \end{aligned} \quad (5)$$

Выделив мнимую часть в выражении для комплексного потенциала (1), с учётом соотношений (4), (5) получим уравнения линий Γ_j

$$x_j = \cos \frac{y_j - \Psi_j}{Q} \sqrt{y_j^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{y_j - \Psi_j}{Q} - 1}, \quad (6)$$

где $y_0 \leq y_j < \Psi_j$, $j = 1, 2$. Из (6) следует, что в точке нулевой скорости граница Γ_2 составляет с галереей угол $\pi/4$.

На рис. 1 изображены кривые 1 – 5, показывающие положение границы Γ при значениях $Q = 2, 1.5, 1.05, 1, 0.8$.

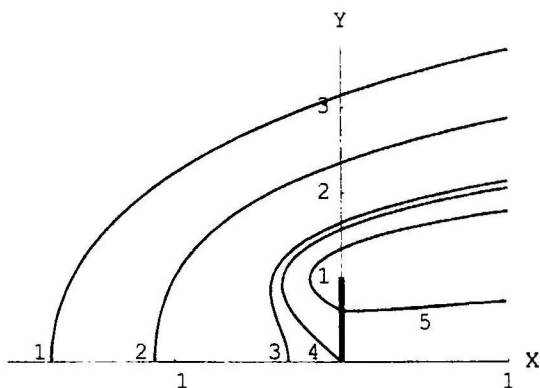


Рис. 1

Две галереи в потоке. Пусть в потоке загрязнённых вод со скоростью v имеются две прямолинейные галереи, расположенные на оси ординат симметрично относительно оси абсцисс. Расстояние между ними равно aL , где $0 < a < 1$. Галереи имеют одинаковые длины $(1-a)(L/2)$ и одинаковые расходы $-q/2$. При $a=0$ галереи сливаются в одну (такой вариант течения рассмотрен выше). Давление на них считается постоянным и одинаковым.

Возможны различные схемы течения, создаваемого суперпозицией набегающего потока и потока от галерей (см. рис. 2).

Первая схема реализуется при значениях $Q \geq Q_1$, где Q_1 – критическое значение расхода. В этом случае существует общая для обеих галерей граница барьера для загрязнённого потока (см. кривую 1 на рис. 2).

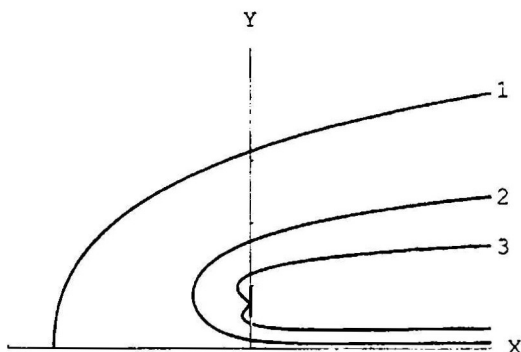


Рис. 2

Когда расход становится меньше Q_1 , происходит прорыв потока между галереями, граница Γ разделяется на две, симметричные относительно оси абсцисс (см. кривую 2). При дальнейшем снижении расхода до его второго критического значения Q_2 острия границ барьеров достигают галерей (см. кривую 3). Таким образом, вторая схема течения реализуется при условии $Q_2 \leq Q < Q_1$. Случай $Q < Q_2$ соответствует третьей схеме, когда поток загрязнений прорывается струями через обе галереи.

Комплексный потенциал течения имеет вид [6]

$$W(z) = -\frac{Q}{2} \ln \frac{\sqrt{z^2+1} + \sqrt{z^2+a^2}}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{z}{2}. \quad (7)$$

Условие $dW/dz=0$ приводит к уравнению

$$-Qz = \sqrt{(z^2+1)(z^2+a^2)}, \quad (8)$$

которому удовлетворяют координаты точек нулевой скорости течения. Анализ картины линий тока течения показывает, что таких точек в потоке две.

В условиях первой схемы точки нулевой скорости располагаются на оси x , и из формулы (8) находятся абсциссы $x_{1,2}$ (обе они отрицательны)

$$x_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{Q^2 - 1 - a^2 \pm \sqrt{(Q^2 - 1 - a^2)^2 - 4a^2}}.$$

При $Q=Q_1=1+a$ обе точки сливаются в одну, так что $x_{1,2} = -\sqrt{a}$, а значение Q_1 является первым критическим для расхода. Таким образом, первая схема течения реализуется при условии $Q \geq 1+a$. Уравнение границы Γ для набегающего потока имеет вид

$$\Psi = \pi Q/2. \quad (9)$$

Выделив мнимую часть выражения (7), из (9) после преобразований получим явную зависимость абсциссы искомой границы от её ординаты

$$x = \begin{cases} -F(y), & 0 < y < \pi Q/2, \\ F(y), & \pi Q/2 < y < \pi Q, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$F(y) = \sqrt{R - y^2 + \cos \frac{2y}{Q} \sqrt{R^2 - a^2}}, \quad R(y) = 2y^2 \operatorname{cosec}^2(2y/Q) - \frac{1+a^2}{2}. \quad (11)$$

Согласно второй схеме течения две точки нулевой скорости располагаются в потоке симметрично относительно оси x . Из уравнения (8) определяются координаты (x_1, y_1) одной из таких точек при условии $y > 0$:

$$x_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{Q^2 - (1-a)^2}, \quad y_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(1+a)^2 - Q^2}. \quad (12)$$

В частности, при $Q=Q_2=1-a$ имеем $x_1=0$, $y_1=\sqrt{a}$, а это означает, что точка нулевой скорости оказывается на границе галереи. Таким образом, вторая схема реализуется при условии

$$1-a \leq Q < 1+a.$$

Значение функции тока на границе Γ , входящее в её уравнение, заранее неизвестно. Оно может быть найдено из условия того, что эта граница содержит точку нулевой скорости с координатами (x_1, y_1) . Тем самым определяется полуширина струи загрязнённой жидкости, разделяющей потоки от двух галерей, в бесконечно удалённой точке

$$y_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(1+a)^2 - Q^2} - Q \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+a-Q}{1+a+Q}}. \quad (13)$$

Граница барьера в данной схеме обладает характерной особенностью: на ней имеется точка минимума ординаты $y=y_m$. Это значение может быть найдено из уравнения

$$y_m = \frac{1+a}{2} \sin \frac{2(y_0 - y_m)}{Q}. \quad (14)$$

Полученные результаты позволяют выписать в явном виде уравнение границы барьера, которая состоит из четырёх участков

$$x = \begin{cases} F_1(y) \cup F_2(y), & y_m < y < y_0, \\ -F_2(y), & y_0 < y < y_1, \\ -F_1(y), & y_1 < y < y_0 + \pi Q/2, \\ F_1(y), & y_0 + \pi Q/2 < y < y_0 + \pi Q, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$F_{1,2} = \sqrt{S - y^2 \pm \cos \frac{2(y - y_0)}{Q} \sqrt{S^2 - a^2}}, \quad (16)$$

$$S(y) = 2y^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{2(y - y_0)}{Q} - (1+a^2)/2. \quad (17)$$

Графики, иллюстрирующие решение задачи для случая $a=0.5$ в первой и второй схемах течения, приведены на рис. 5 работы [5]. Они построены с использованием формул (10) – (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Javandel I., Tsang C.F. *Capture-zone type curves: a tool for aquifer cleanup* // Ground Water. – 1986. – V. 24. – No. 5. – P. 616–625.
2. Strack O.D.I. *Groundwater Mechanics*. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1989. – P. 227–240.
3. Bakker M., Strack O.L.D. *Capture zone delineation in two-dimensional groundwater flow models* // Water Resources Research. – 1996. – V. 32. – No. 5. – P. 1309–1315.

4. Christ J.A., Goltz M.N., Huang J. *Development and application of analytical model to aid design and implementation of in situ remediation technologies* // Journal of Contaminant Hydrology. – 1999. – 37. – P. 295–317.

5. Скворцов Э.В., Кузьмин Р.С. *Влияние скважин и галерей на поток подземных вод* // Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского. Т. 3. Краевые задачи и их приложения. – Казань: Унипресс, 1999. – С. 78–84.

6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. – М.: Наука, 1973. – 736 с.